Zur nichtlinearen Feldtheorie

Von Jochen Lindner *

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Mainz

(Z. Naturforschg. **16 a**, 346—356 [1961]; eingegangen am 7. Dezember 1960)

Es wird ein Lösungsverfahren für die Feldgleichungen der nichtlinearen Feldtheorie von Bechert entwickelt, das ruhende Ladungs- und Massenverteilungen mit elektrostatischen und Gravitationsfeldern im Riemannschen Raum zu beschreiben gestattet. Eine spezielle Lösung führt zum statischen Modell einer Coulombschen Ladung, die durch Gravitationskräfte zusammengehalten wird [1]. Mehrteilchenmodelle gibt es nur dann, wenn alle Teilchen gleichnamig geladen sind. Dynamische Schwierigkeiten können in der vorliegenden unquantisierten Form der Theorie nicht behoben werden. Abschließend wird auf das Problem einer rotierenden Ladungsverteilung mit elektromagnetischem Feld eingegangen, die ein klassisches Analogon zum Spin ist.

Bechert hat in einer Reihe von Arbeiten eine nichtlineare Feldtheorie entwickelt, die zunächst in Lorentz-invarianter Form [2], dann aber in allgemein kovarianter Formulierung aufgestellt wurde [3]. Sie fordert die Gültigkeit der Einsteinschen Gleichungen des Gravitationsfeldes für den materieerfüllten Raum [4] und der kovariant geschriebenen Maxwellschen Gleichungen. An Stelle des phänomenologisch eingeführten Einsteinschen Materietensors T_ν^μ wird jedoch ein neuer Tensor Y_ν^μ der gesamten Energie- und Impulsdichte von genau bestimmter Form verwendet. Ferner wird angenommen, daß es eine im Raum kontinuierlich verteilte Vierergeschwindigkeit V^μ gibt, so daß dort, wo sich Ruhmassen und Ladungen befinden, auch von ihren Strömungsfeldern gesprochen werden kann. Die Erhaltungssätze für die Gesamtenergie und den Gesamtimpuls, die Ruhmassen und Ladungen ergeben sich von selbst; eine zur Ruhmassendichte proportionale Invariante U ist der Raumkrümmung R proportional; aus der Theorie folgt das streng gültige Bewegungsgesetz der Materie. Die Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen für den materiefreien Raum sind auch Lösungen der Bechertschen Theorie für den feld- und materiefreien Raum; so z. B. die Schwarzschildsche, die Friedman-Lemaîtresche oder die Silbersteinsche Lösung [5]. Es bleiben also auch die makrophysikalischen Folgerungen aus diesen Lösungen erhalten, wie etwa die Periheldrehungen der Planetenbahnen oder die Lichtablenkung an der Sonne. Die Bechertsche einheitliche Theorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes hat darüber hinausgehend jedoch zum Ziel, eine Theorie der Elementarteilchen zu geben.

In der vorliegenden Arbeit wird eine allgemeine statische Lösung der Bechertschen Feldgleichungen hergeleitet; aus ihr lassen sich physikalisch bemerkenswerte Lösungen gewinnen, die einem oder mehreren gleichnamig geladenen Teilchen entsprechen. Die Einteilchenlösung korrespondiert einem ruhenden Teilchen mit elektrostatischem Feld, das in großer Entfernung coulombsch ist. Wie es in einer konsequenten Feldtheorie der Fall sein muß, folgen hier auch die räumlichen Verteilungen der Ladung, der Ruhmasse, der elektromagnetischen und der Gesamtenergie aus den Grundgleichungen der Theorie. Die Ladungsdichte ist Null im Zentrum des Teilchens, steigt nach außen hin zu einem Maximum an und fällt dann rasch gegen Null ab. Alle meßbaren Größen des statischen Modells, wie Ladung, Ruhmasse und Energie, sind in jedem Volumen endlich, insbesondere gilt das für die Gesamtladung Q und die Gesamtmasse M_0; vgl. § 1. Diese einheitliche Theorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes gestattet es, den Zusammenhalt eines geladenen Teilchens zu verstehen, indem die klassischen Eigenschaften des Teilchens, schwer und geladen zu sein, auf geeignete, zeitlich unveränderliche Deformationen des metrischen Feldes zurückgeführt werden können. Wie es von Einstein bereits im Jahre 1919 vermutet wurde [6], können in einer Gravitationstheorie einfache Elementarteilchenmodelle aufgestellt werden.

Es lassen sich auch Lösungen finden, die zwei

* D 77, gekürzter Teil einer Dissertation, Mainz 1960.

[1] K. Bechert u. J. Lindner, Ann. Phys., Lpz. (7), **6**, 361 [1960].

[2] K. Bechert, Ann. Phys., Lpz. (6), **7**, 369 [1950]; **10**, 430 [1952]; **16**, 97 [1955].

[3] K. Bechert, Z. Naturforschg. **11 a**, 177 [1956].

[4] A. Einstein, Ann. Phys., Lpz. (4) **49**, 769 [1916].

[5] L. Silberstein, Phys. Rev. **49**, 268 [1936].

[6] A. Einstein, S.B. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1919.

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

oder mehreren Teilchen einheitlichen Ladungsvorzeichens entsprechen. Physikalisch brauchbare statische Lösungen, welche elektrischen Dipolen, Quadrupolen usw. zugeordnet werden könnten, gibt es dagegen nicht, weil an sich mögliche formale Lösungen der Feldgleichungen unendlich große Feldenergien ergeben würden. Bei den Lösungen für mehrere gleiche Teilchen treten dynamische Schwierigkeiten auf: auch weit entfernte, miteinander in Wechselwirkung stehende Teilchen sollten nach ihnen im Gegensatz zur makroskopischen Erfahrung im Gleichgewicht verharren können; in Atomkernen könnte jedoch ein Analogon zu derartigen Lösungen gesehen werden.

Abschließend wird das Problem einer stationären rotierenden Ladungsverteilung behandelt; neben den elektrischen treten dann auch magnetische Feldstärkenkomponenten auf, und die azimutale Komponente der Vierergeschwindigkeit ist im Gegensatz zum statischen Fall von Null verschieden. Derartige stationäre Probleme sind mathematisch ungleich schwieriger zu behandeln als statische. Könnte man exakte oder genäherte Lösungen finden, so ließe sich das Verhältnis des Ladungsquadrats zum mechanischen Drehimpuls berechnen; man hätte so eine klassische Theorie der SOMMERFELDschen Feinstrukturkonstanten.

§ 1. Modell einer Coulombschen Ladung

In einer früheren Arbeit wurde das Modell einer COULOMBschen Ladung in der nichtlinearen Feldtheorie von BECHERT besprochen [1]. Ging man vom folgenden Linienelement im RIEMANNschen Raum aus:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = e^{-2\nu}\left[e^{2\lambda}(\mathrm{d}x_1^2 + x_1^2\,\mathrm{d}x_2^2) + x_1^2 \sin^2 x_2\,\mathrm{d}x_3^2\right] + e^{2\nu}\,\mathrm{d}x_4^2, \tag{1}$$

d. h.

$$g_{11} = e^{2\lambda-2\nu}; \quad g_{22} = x_1^2\,e^{2\lambda-2\nu}; \quad g_{33} = x_1^2 \sin^2 x_2\,e^{-2\nu};$$
$$g_{44} = e^{2\nu}; \quad g_{\mu\nu} = 0\,, \text{ wenn } \mu \neq \nu\,, \tag{2}$$

so ließ sich zeigen, daß mit

$$\nu = L/x_1; \quad \lambda = -(1-\eta)\,L^2 \sin^2 x_2/2\,x_1^2 \tag{3}$$

eine vollständige, physikalisch bemerkenswerte Lösung aller für die vorliegende Theorie charakteristischen Gleichungen gewonnen werden konnte. x_1, x_2, x_3 entsprechen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ, $x_4 = i\,c\,t$. L und η sind verfügbare Konstanten, für die Ungleichungen

$$L > 0; \quad \eta > 0 \tag{4}$$

gelten müssen, wenn die Lösung brauchbar sein soll. Sie entspricht einem ruhenden Teilchen mit elektrostatischem Feld, das in großer Entfernung in das Feld einer COULOMBschen Punktladung übergeht. Die Linearabmessungen des Teilchens sind von der Größenordnung der Konstanten L, die mit der Gesamtruhmasse M_0 und der Gesamtladung Q_c (s. Anm. [7]) durch die wichtige Beziehung

$$L = Q_c^2/M_0\,c^2 \tag{5}$$

verbunden ist; L ist also der „klassische Teilchenradius", für ein Elektron der klassische Elektronenradius $r_0 = 2{,}84 \cdot 10^{-13}$ cm. Der COULOMBschen Abstoßung des entweder positiv oder negativ geladenen Teilchens wird durch die Gravitationskräfte genau das Gleichgewicht gehalten. Das Reziproke $1/\eta$ der dimensionslosen Zahl

$$\eta = G\,M_0^2/Q_c^2 \tag{6}$$

entspricht der klassisch berechenbaren EDDINGTONschen Konstanten, die das Verhältnis der COULOMB-Kräfte zu den Gravitationskräften angibt.

Die hier skizzierte Lösung ist nur ein Spezialfall einer sehr viel allgemeineren statischen Lösung des BECHERTschen Gleichungssystems; sie soll im folgenden hergeleitet und auf ihre physikalischen Konsequenzen hin untersucht werden.

§ 2. Grundgleichungen, Interpretation

In der nichtlinearen Feldtheorie von BECHERT werden die folgenden Größen verwendet [8]: die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des metrischen Fundamentaltensors mit der Eigenschaft $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, die Komponenten der Vierergeschwindigkeit

$$V^\mu = \mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}s\,, \tag{7}$$

die Komponenten $F^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldtensors mit der Eigenschaft

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{8}$$

und die Ladungsinvariante C. Zwischen diesen Grö-

[7] Q_c ist die Ladung in konventionellen elektrostatischen Einheiten, während in der Arbeit mit rationellen Einheiten gerechnet wird. Es ist $Q = \sqrt{4\,\pi}\;Q_c$.

[8] Siehe Anm. [3]. Der Strichpunkt bedeutet kovariante, der Strich gewöhnliche Differentiation. Wir benutzen die EINSTEINsche Summenvorschrift.

ßen bestehen in der BECHERTschen Theorie die Feldgleichungen:

$$R^\mu_\nu = \tfrac{1}{2} g^\mu_\nu R - \varkappa Y^\mu_\nu ; \qquad \text{(EINSTEIN-Gleichungen)} \quad (9)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = S^\mu ; \qquad (10)$$

$$F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0; \qquad \text{(MAXWELL-Gleichungen)} \quad (11)$$

$$V^\mu V_\mu = 1 . \qquad (12)$$

R^μ_ν ist der gemischte RIEMANNsche Krümmungstensor zweiter Stufe, $R = R^\mu_\mu$ der Krümmungsskalar. $\varkappa$ hat die Bedeutung:

$$\varkappa = 8\pi G/c^4 . \qquad (13)$$

An Stelle des EINSTEINschen Materietensors wird Y^μ_ν, der Tensor der gesamten Energie- und Impulsdichte verwendet:

$$Y^\mu_\nu = T^\mu_\nu + U V^\mu V_\nu ; \qquad (14)$$

T^μ_ν bedeutet den MAXWELLschen Spannungstensor:

$$T^\mu_\nu = F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4} g^\mu_\nu F^{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha} . \qquad (15)$$

U ist der Ruhmassenskalar; es gilt wegen $T^\alpha_\alpha \equiv 0$:

$$R = \varkappa U . \qquad (16)$$

Das streng gültige Bewegungsgesetz der Materie heißt [s. Anm. [3], Gl. (4.4)]:

$$U \left[\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \right] = F^\alpha{}_\mu S^\mu ; \qquad (17)$$

$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sind die CHRISTOFFEL-Symbole.

Den ko- und kontravarianten Feldgrößen ordnen wir im Falle *orthogonaler Koordinaten* physikalische Meßgrößen in folgender Weise eineindeutig zu (E_i = elektrische, H_l = magnetische Feldstärke, $\mathfrak{v}$ = räumlicher Geschwindigkeitsvektor):

$$f_{12} = {}^+\sqrt{F^{12} F_{12}}, \quad f_{13} = {}^+\sqrt{F^{13} F_{13}}, \quad \text{usw.} \qquad (18)$$

$$v_1 = {}^+\sqrt{V^1 V_1}, \quad v_2 = {}^+\sqrt{V^2 V_2}, \quad \text{usw.} \qquad (19)$$

$f_{\mu\nu}$ identifizieren wir mit dem LORENTZ-invarianten Tensor des elektromagnetischen Feldes:

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -i E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -i E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -i E_3 \\ i E_1 & i E_2 & i E_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

v_μ mit dem LORENTZ-invarianten Vierervektor der Geschwindigkeit:

$$v_\mu = \left(\frac{\mathfrak{v}}{i c \sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right); \quad \beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c} . \qquad (21)$$

Die Viererstromdichte ist proportional zur Ladungsdichte ϱ_Q:

$$s_\mu \equiv C v_\mu = \left(\frac{1}{c} \varrho_Q \mathfrak{v}, i \varrho_Q \right), \qquad (22)$$

und es folgt durch Vergleich mit (21):

$$C = i \varrho_Q \sqrt{1-\beta^2} . \qquad (23)$$

Nach leichter Umrechnung bekommt man für die im Volumenelement $d\tau_3 = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ befindliche Ladung:

$$\varrho_Q\, d\tau_3 = -i C V^4 \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 ; \qquad (24)$$

$g = \| g_{\mu\nu} \|$ ist die Determinante der $g_{\mu\nu}$.

Aus der Form (14) für Y^μ_ν folgt insbesondere, daß $-Y^4_4$ die Gesamtenergiedichte, $-T^4_4$ die elektromagnetische und $-U V^4 V_4$ die Gravitationsenergiedichte sind. Nun läßt sich leicht die Ruhmassendichte ϱ_{M0} bestimmen; es ist nämlich nach Gl. (21):

$$-U V^4 V_4 = -U v_4^2 = -\frac{U v_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \left(-\frac{U v_4}{c^2} \right) c^2 + \left(-\frac{U v_4}{c^2} \right) \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \dots .$$

Deutet man das speziell-relativistisch, so entsprechen der erste Term rechts der Ruhenergiedichte, die folgenden der kinetischen Energiedichte. Folglich erhält man für die in $d\tau_3$ befindliche Ruhmasse:

$$\varrho_{M0}\, d\tau_3 = -\frac{U V^4}{c^2} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 . \qquad (25)$$

§ 3. Die Feldgleichungen in statischer rotationssymmetrischer Darstellung

Eine vollständige Lösung der Feldgleichungen (9) bis (12) besteht aus der Darstellung aller Tensorkomponenten $g_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$, V^μ, C als Funktionen der x_1 bis x_4 derart, daß alle Feldgleichungen erfüllt werden. Im allgemeinen sind die Lösungen zeitabhängig; eine Lösung, in welcher keine Feldgröße von x_4 abhängt, soll „stationär" heißen (vgl. § 9).

Wir gehen aus von der Maßbestimmung im RIEMANNschen Raum:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = e^{2\sigma} dx_1^2 + e^{2\tau} dx_2^2 + e^{2\mu} x_1^2\, dx_3^2 + e^{2\nu} dx_4^2 , \qquad (26)$$

d. h. $\quad g_{11} = e^{2\sigma} = 1/g^{11}; \quad g_{22} = e^{2\tau} = 1/g^{22};$

$$g_{33} = x_1^2 e^{2\mu} = 1/g^{33}; \quad g_{44} = e^{2\nu} = 1/g^{44};$$

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu . \qquad (27)$$

x_1, x_2, x_3 entsprechen Zylinderkoordinaten r, z, φ; $x_4 = i c t$. Wir nehmen an, daß σ, τ, μ, ν sowie alle elektromagnetischen Feldgrößen nur von x_1 und x_2 abhängen; die Lösungen sollen also stationär und rotationssymmetrisch sein. Man bekommt (s. Anm. [8]):

$$R_1^1 = e^{-2\sigma}\Big[\tau_{|1|1}+\mu_{|1|1}+\nu_{|1|1}+\tau_{|1}^2+\mu_{|1}^2+\nu_{|1}^2 - \sigma_{|1}(\tau_{|1}+\mu_{|1}+\nu_{|1}) - \frac{\sigma_{|1}}{x_1}+\frac{2\mu_{|1}}{x_1}\Big] + e^{-2\tau}\Big[\sigma_{|2|2}+\sigma_{|2}(\sigma_{|2}-\tau_{|2}+\mu_{|2}+\nu_{|2})\Big]; \quad (28\,\mathrm{a})$$

$$R_2^2 = e^{-2\sigma}\Big[\tau_{|1|1}+\tau_{|1}(-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+\mu_{|1}+\nu_{|1})\Big] + e^{-2\tau}\Big[\sigma_{|2|2}+\mu_{|2|2}+\nu_{|2|2}+\sigma_{|2}^2+\mu_{|2}^2+\nu_{|2}^2 - \tau_{|2}(\sigma_{|2}+\mu_{|2}+\nu_{|2})\Big]; \quad (28\,\mathrm{b})$$

$$R_3^3 = e^{-2\sigma}\Big[\mu_{|1|1}+\mu_{|1}(-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+\mu_{|1}+\nu_{|1}) + \frac{1}{x_1}(-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+2\mu_{|1}+\nu_{|1})\Big] + e^{-2\tau}\Big[\mu_{|2|2}+\mu_{|2}(\sigma_{|2}-\tau_{|2}+\mu_{|2}+\nu_{|2})\Big]; \quad (28\,\mathrm{c})$$

$$R_4^4 = e^{-2\sigma}\Big[\nu_{|1|1}+\nu_{|1}(-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+\mu_{|1}+\nu_{|1}) + \frac{\nu_{|1}}{x_1}\Big] + e^{-2\tau}\Big[\nu_{|2|2}+\nu_{|2}(\sigma_{|2}-\tau_{|2}+\mu_{|2}+\nu_{|2})\Big]; \quad (28\,\mathrm{d})$$

$$R_2^1 = e^{-2\sigma}\Big[\mu_{|1|2}+\nu_{|1|2}+\mu_{|1}\mu_{|2}+\nu_{|1}\nu_{|2}-\sigma_{|2}(\mu_{|1}+\nu_{|1}) - \tau_{|1}(\mu_{|2}+\nu_{|2}) - \frac{\sigma_{|2}}{x_1}+\frac{\mu_{|2}}{x_1}\Big], \quad (28\,\mathrm{e})$$

$$R_3^1 = R_4^1 = R_3^2 = R_4^2 = R_4^3 = 0. \quad (28\,\mathrm{f})$$

$$R = e^{-2\sigma}\Big[2(\tau_{|1|1}+\mu_{|1|1}+\nu_{|1|1}) - \sigma_{|1}^2+\tau_{|1}^2+\mu_{|1}^2+\nu_{|1}^2 + (-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+\mu_{|1}+\nu_{|1})^2 + \frac{1}{x_1}(-\sigma_{|1}+\tau_{|1}+4\mu_{|1}+\nu_{|1})\Big] + e^{-2\tau}\Big[2(\sigma_{|2|2}+\mu_{|2|2}+\nu_{|2|2}) + \sigma_{|2}^2-\tau_{|2}^2+\mu_{|2}^2 + \nu_{|2}^2+(\sigma_{|2}-\tau_{|2}+\mu_{|2}+\nu_{|2})^2\Big]. \quad (29)$$

Das elektromagnetische Feld soll rein elektrostatisch und ohne azimutale (x_3-)Komponente sein; das bedeutet wegen (18), (20):

$$F^{12} = F^{13} = F^{23} = F^{34} = 0. \quad (30)$$

Das erste MAXWELLsche Gleichungsquadrupel (10) heißt nun:

$$F^{k\alpha}{}_{;\alpha} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,F^{k\alpha})_{|\alpha} = 0 = S^k = C\,V^k; \quad k = 1, 2, 3; \quad (31\,\mathrm{a})$$

$$F^{4\alpha}{}_{;\alpha} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,F^{4\alpha})_{|\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big[(\sqrt{g}\,F^{41})_{|1}+(\sqrt{g}\,F^{42})_{|2}\Big] = S^4 = C\,V^4. \quad (31\,\mathrm{b})$$

Soll die Ladungsdichte nicht überall verschwinden, so muß wegen (23) $C \neq 0$ sein, und es folgt:

$$V^1 = V^2 = V^3 = 0; \quad V^4\,V_4 = g_{44}(V^4)^2 = 1; \quad (32)$$

$$V^4 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_{44}}} = \varepsilon\,e^{-\nu}; \quad V_4 = \varepsilon\sqrt{g_{44}} = \varepsilon\,e^{-\nu}; \quad \varepsilon^2 = 1 \text{ (s. Anm. [9])};$$

d. h. aber: eine stationäre Lösung der Grundgleichungen (9) – (12) ohne Magnetfeld ist statisch, d. h. die Massen und Ladungen ruhen überall. Das zweite MAXWELLsche Quadrupel (11) liefert nur

$$F_{24|1} + F_{41|2} = 0. \quad (33)$$

Die Komponenten des MAXWELLschen Spannungstensors sind nach (15):

$$T_1^1 = -T_2^2 = \tfrac{1}{2}(F^{14}F_{14} - F^{24}F_{24}) = \tfrac{1}{2}e^{-2\nu}(e^{-2\sigma}F_{14}^2 - e^{-2\tau}F_{24}^2); \quad (34\,\mathrm{a})$$

$$T_3^3 = -T_4^4 = -\tfrac{1}{2}(F^{14}F_{14} + F^{24}F_{24}) = -\tfrac{1}{2}e^{-2\nu}(e^{-2\sigma}F_{14}^2 + e^{-2\tau}F_{24}^2); \quad (34\,\mathrm{b})$$

$$T_2^1 = F^{14}F_{24} = e^{-2\sigma-2\nu}F_{14}F_{24}; \quad (34\,\mathrm{c})$$

$$T_\nu^\mu = 0 \quad \text{sonst}. \quad (34\,\mathrm{d})$$

Die Feldgleichungen (9) geben nun

$$\tfrac{1}{2}R - R_1^1 = \varkappa\,T_1^1, \quad (35\,\mathrm{a})$$

$$\tfrac{1}{2}R - R_2^2 = \varkappa\,T_2^2 = -\varkappa\,T_1^1, \quad (35\,\mathrm{b})$$

$$\tfrac{1}{2}R - R_3^3 = \varkappa\,T_3^3, \quad (35\,\mathrm{c})$$

$$-\tfrac{1}{2}R - R_4^4 = \varkappa\,T_4^4 = -\varkappa\,T_3^3, \quad (35\,\mathrm{d})$$

$$-R_2^1 = \varkappa\,T_2^1. \quad (35\,\mathrm{e})$$

Die restlichen Gln. (9) sind identisch erfüllt [vgl. (28 f), (34 d)]. (35 a – d) sind wegen $R = R_\mu^\mu$ nur drei unabhängige Gleichungen. Durch Addition und Subtraktion folgt aus (35 a, c) mit (34 a, b):

$$(\tfrac{1}{2}R - R_3^3) - (\tfrac{1}{2}R - R_1^1) = -\varkappa\,e^{-2\sigma-2\nu}F_{14}^2, \quad (36\,\mathrm{a})$$

$$(\tfrac{1}{2}R - R_3^3) + (\tfrac{1}{2}R - R_1^1) = -\varkappa\,e^{-2\sigma-2\nu}F_{24}^2, \quad (36\,\mathrm{b})$$

ferner folgt aus (35 c, d):

$$R_3^3 + R_4^4 = 0. \quad (37)$$

Das ist eine Diff.-Gl. für die $g_{\mu\nu}$, die außer den $g_{\mu\nu}$ nur Diff.-Quotienten der $g_{\mu\nu}$ nach x_1 und x_2 von höchstens zweiter Ordnung enthält. Man bekommt eine zweite, nur zwischen den $g_{\mu\nu}$ und ihren Ableitungen bestehende Gleichung, wenn man (35 e)

[9] Diese Darstellung der Größen V^4 und V_4 stammt von Prof. BECHERT.

quadriert, (34 c) beachtet und F_{14}^2 und F_{24}^2 mittels (36) eliminiert:

$$(\tfrac{1}{2}R - R_1^1)^2 + e^{2\sigma-2\tau}(R_2^1)^2 = (\tfrac{1}{2}R - R_3^3)^2. \quad (38)$$

Der weitere Lösungsweg läßt sich folgendermaßen beschreiben: man wird versuchen, aus (37), (38) alle vier von Null verschiedenen $g_{\mu\nu}$ zu bestimmen. (36 a, b) liefert dann F_{14} und F_{24}, die aber noch die Gl. (33) erfüllen müssen. V^4 und C lassen sich aus (32), (31 b) berechnen. Die so gewonnene Lösung braucht physikalisch nicht sinnvoll zu sein; sie ist es nur dann, wenn Energie, Ladung und Ruhmasse in jedem Raumgebiet endlich sind und wenn in materie- und feldfreien Gebieten in großer Entfernung von den Ladungen und Ruhmassen die Maßbestimmung pseudoeuklidisch wird.

§ 4. Statische Lösungen der Feldgleichungen

In den beiden Gln. (37), (38) lassen sich alle e-Faktoren herausheben, wenn man

$$\sigma = \tau \quad (39)$$

setzt, wie ein Blick auf die Form der R_ν^μ in (28) zeigt. Dann heißt (37):

$$(\mu+\nu)_{|1|1} + (\mu+\nu)_{|2|2} + \frac{2}{x_1}(\mu+\nu)_{|1} + [(\mu+\nu)_{|1}]^2 + [(\mu+\nu)_{|2}]^2 = 0. \quad (40)$$

Diese homogene Diff.-Gl. für die Summe $\mu+\nu$ erfüllen wir durch

$$\mu = -\nu. \quad (41)$$

Damit wird (38):

$$\left[\frac{1}{x_1}(\sigma+\nu)_{|1} - \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right]^2 + \left[\frac{1}{x_1}(\sigma+\nu)_{|2} - 2\nu_{|1}\nu_{|2}\right]^2 = \left[(\sigma+\nu)_{|1|1} + (\sigma+\nu)_{|2|2} + \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right]^2. \quad (42)$$

Wir setzen $$\lambda \equiv \sigma + \nu \quad (43)$$

und bekommen

$$\left(\frac{\lambda_{|1}}{x_1} - \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right)^2 + \left(\frac{\lambda_{|2}}{x_1} - 2\nu_{|1}\nu_{|2}\right)^2 = \left(\lambda_{|1|1} + \lambda_{|2|2} + \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right)^2. \quad (44)$$

Für $\lambda \equiv 0$ ist (44) eine Identität, und man bekommt keine Bedingung für $\nu(x_1, x_2)$. Für die Feldstärken müssen die Gln. (33), (36) erfüllt sein. Man bekommt wegen (39) und (43)

$$F_{14} = \delta\, i\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\, e^{\nu}\nu_{|1} \quad ; \quad F_{24} = \delta\, i\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\, e^{\nu}\nu_{|2}; \quad \delta^2 = 1.$$

Nach (32), (31 b), (16) lassen sich V^4, C, U berechnen und damit auch nach (24), (25) die im Volumen τ_3 enthaltenen Ladungen und Ruhmassen:

$$Q = \int_{\tau_3} \varrho_Q \,\mathrm{d}\tau_3 = -\delta\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\, J;$$

$$M_0 = \int_{\tau_3} \varrho_{M_0} \,\mathrm{d}\tau_3 = -\frac{2\,\varepsilon}{\varkappa\, c^2}\, J; \quad \varepsilon^2 = 1;$$

$$J = \int_{\tau_3} \left(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2 - \nu_{|1|1} - \nu_{|2|2} - \frac{\nu_{|1}}{x_1}\right) e^{-\nu}\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3.$$

Bei geeigneter Wahl der Funktion $\nu = \nu(x_1, x_2)$ divergiert das Integral J nicht, so z. B. für

$$\nu = L/(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \quad \text{und} \quad L = \text{const} > 0$$

[vgl. dazu Anm. [1], Gln. (43), (44)]. Setzt man die Konvergenz von J im betrachteten Raumstück voraus, so läßt sich die spezifische Ladung bestimmen:

$$\left|\frac{Q_c}{M_0}\right| = \left|\frac{Q}{\sqrt{4\pi}\, M_0}\right| = \frac{c^2\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{8\pi}} = \sqrt{G} = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ el.st. CGS.-Einh.} \quad (45)$$

G ist die Gravitationskonstante. Die spezifische Ladung ist räumlich konstant und um rund 20 Zehnerpotenzen kleiner als die spezifischen Ladungen der im Rahmen der heutigen Meßgenauigkeit als geladen geltenden Elementarteilchen: für das Elektron und das Proton sind die spez. Ladungen $5{,}3 \cdot 10^{17}$ bzw. $2{,}6 \cdot 10^{14}$ CGS. Erstreckt man das Integral J für das oben angegebene $\nu = L/(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ über den ganzen Raum, so erhält man $J = 4\pi L$; da M_0 positiv sein muß, ist $\varepsilon = -1$, und es folgt

$$Q = -4\pi\,\delta\, L\sqrt{2/\varkappa}; \quad M_0 = 8\pi L/\varkappa c^2.$$

Da Neutronen und Neutrinos vielleicht nicht völlig ungeladen, sondern nur mit unmeßbar kleinen Ladungen versehen sind, wollen wir probieren, was für L herauskommt, wenn M_0 die Neutron- oder Neutrinomasse ist. Mit $M_0 = M_{0,\,\text{Neutron}} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g bekommt man $L = 1{,}11 \cdot 10^{-52}$ cm. Die Neutrinomasse ist sehr viel kleiner als die Neutronenmasse, das zugehörige L daher um das Verhältnis $M_{0,\,\text{Neutrino}}/M_{0,\,\text{Neutron}}$ kleiner als $1{,}11 \cdot 10^{-52}$ cm. Da L eine in der Größenordnung des Teilchens liegende Länge und um das fast 10^{40}-fache (!) kleiner ist als die ungefähren Teilchendurchmesser, scheint die Lösung $\lambda = 0$, $\nu = L/(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ auch für ein Neutron- oder Neutrinomodell nicht geeignet zu sein, sie zeigt aber bereits, daß in einer klassischen Theorie der Gravitation und des elektromagnetischen Feldes eine Massenverteilung durch ihre Gravitationswirkung der Coulombschen Abstoßung durchaus die Waage halten kann.

Ein allgemeineres Lösungsverfahren für Gl. (44) spricht sich im folgenden merkwürdigen Satz aus, den wir sogleich beweisen werden.

Satz: Setzt man die auf der linken Seite von (44) stehenden Klammerausdrücke gleich Null (wir schreiben λ^* an Stelle von λ):

$$\frac{\lambda^*_{|1}}{x_1} - \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda^*_{|2}}{x_1} - 2\,\nu_{|1}\nu_{|2} = 0 \tag{46}$$

und faßt die dadurch entstehenden Diff.-Gln. als Diff.-Gln. für λ^* auf, so kann die Integrabilitätsbedingung durch

$$\Delta\nu = 0 \tag{47}$$

erfüllt werden. Ist ν eine Potentialfunktion und λ^* eine Lösung von (46), so stellen ν und

$$\lambda = \gamma\,\lambda^* \tag{48}$$

mit einer verfügbaren Konstanten γ eine Lösung der Diff.-Gl. (44) dar.

Zunächst folgt aus (46) die Integrabilitätsbedingung:

$$\lambda^*_{|2|1} - \lambda^*_{|1|2} = 2\,x_1\nu_{|2}\left(\nu_{|1|1} + \nu_{|2|2} + \frac{\nu_{|1}}{x_1}\right) \equiv 2\,x_1\nu_{|2}\Delta\nu = 0, \tag{49}$$

denn der Klammerausdruck in (49) ist gerade der LAPLACE-Operator in Zylinderkoordinaten, wenn ν nicht von x_3 abhängt, wie wir es vorausgesetzt haben. (49) erfüllen wir durch (47), denn der Fall $\nu_{|2} = 0$ ist uninteressant. Setzt man (48) in (44) ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned}&[(\gamma-1)(\nu_{|1}^2 - \nu_{|2}^2)]^2 + [(\gamma-1)\cdot 2\,\nu_{|1}\nu_{|2}]^2\\ &\quad = [\gamma(\nu_{|1}^2 - \nu_{|2}^2 + 2\,x_1\nu_{|1}(\nu_{|1|1} + \nu_{|2|2})) + \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2]^2.\end{aligned}$$

Wegen $\Delta\nu = 0$ kann man $\nu_{|1|1} + \nu_{|2|2}$ durch $-\nu_{|1}/x_1$ ersetzen und erhält:

$$(\gamma-1)^2[(\nu_{|1}^2 - \nu_{|2}^2)^2 + (2\,\nu_{|1}\nu_{|2})^2] = (1-\gamma)^2(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2)^2.$$

Dies ist aber eine für jedes ν bestehende Identität[10]. In (46), (47), (48) haben wir eine sehr allgemeine statische Lösung der g_{11} bis g_{44}.

§ 5. Bestimmung der Feldgrößen

Für die Feldstärken erhält man nach (36 a, b):

$$F_{14}^2 = -\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}\,e^{2\nu}\nu_{|1}^2; \qquad F_{24}^2 = -\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}\,e^{2\nu}\nu_{|2}^2.$$

mit $\delta^2 = 1$ und $\bar{\delta}^2 = 1$ gibt das:

$$F_{14} = \delta\,i\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\,e^{\nu}\nu_{|1}; \qquad F_{24} = \bar{\delta}\,i\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\,e^{\nu}\nu_{|2}.$$

Die restliche MAXWELL-Gleichung (33) $F_{14|2} = F_{24|1}$ verlangt $\delta = \bar{\delta}$, und mit dem Potential Φ bekommt man:

$$\Phi = \delta\,i\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\,e^{\nu}; \quad \delta^2 = 1; \quad F_{14} = \Phi_{|1}; \quad F_{24} = \Phi_{|2}. \tag{50}$$

Mit den Gln. (46), (47), (48), (50) haben wir eine vollständige Lösung der BECHERTschen Feldgleichungen (9) – (12) gewonnen. (32) und (31 b) liefern:

$$V^4 = \varepsilon\,e^{-\nu}; \quad \varepsilon^2 = 1;$$

$$C = \delta\,\varepsilon\,i\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\,e^{2\nu-2\lambda}(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2). \tag{51}$$

Für die Krümmungsinvariante R und den Ruhmassenskalar U folgt aus (16), (29):

$$R = \varkappa\,U = 2(1-\gamma)\,e^{2\nu-2\lambda}(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2). \tag{52}$$

C, R, U sind zueinander proportional und damit auch die Ladungs- und Ruhmassendichten. In einem räumlichen Volumen τ_3 befinden sich nach (25) die Ruhmasse:

$$\int_{\tau_3} \varrho_{M0}\,d\tau_3 = -\frac{2\,\varepsilon(1-\gamma)}{\varkappa\,c^2}\int_{\tau_3}(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2)\,e^{-\nu}\,x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \tag{53}$$

und nach (24) die elektrische Ladung:

$$\int_{\tau_3} \varrho_Q\,d\tau_3 = \delta\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\int_{\tau_3}(\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2)\,e^{-\nu}\,x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{54}$$

Das rechts stehende Integral ist stets positiv; wir setzen seine Konvergenz voraus (s. §§ 6, 7). Dann muß, damit die Ladung reell wird,

$$\gamma < 1 \tag{55}$$

sein; damit die Ruhmasse positiv ausfällt, ist

$$\varepsilon = -1 \tag{56}$$

zu setzen. So wird $V^4 = -e^{-\nu}$, und für die spezifische Ladung eines beliebig großen Raumgebietes erhält man den konstanten Wert (in konventionellen CGS-Einheiten; $\varrho_Q = \sqrt{4\pi}\,\varrho_{Qc}$):

$$\frac{\varrho_{Qc}}{\varrho_{M_0}} = \delta\sqrt{\frac{G}{1-\gamma}}\;\mathrm{g}^{-1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{sec}^{-1}. \tag{57}$$

[10] Bei einer Besprechung der Lösungsmöglichkeiten der für eine bestimmte Potentialfunktion formulierten Gl. (44) hat Prof. BECHERT eine spezielle Lösung gefunden, deren Kenntnis für die Ableitung des obigen Satzes sehr nützlich war.

Für jede zulässige Lösung ν, λ des § 4 hat die elektrische Ladung im ganzen Raum dasselbe Vorzeichen, das durch $\delta = \pm 1$ bestimmt ist. *Der theoretische Wert der spezifischen Ladung* (57) *kann durch geeignete Wahl der verfügbaren Konstanten* γ *jedem bei den Elementarteilchen gemessenen Wert gleichgesetzt werden.*

Die Dichten der elektromagnetischen und der Gesamtenergie sind $-T_4^4$ und $-Y_4^4$. Man bekommt dafür aus (34 b), (50), (52) und (14), (32):

$$-T_4^4 = \tfrac{1}{2}\,U; \quad -Y_4^4 = -T_4^4 - U = -\tfrac{1}{2}\,U. \quad (58)$$

U ist nach (52) positiv. Früher wurde $-U\,V^4\,V_4 = -U$ als Gravitationsenergiedichte eingeführt; $c^2\,\varrho_{M_0} = U$ ist als Ruhenergiedichte anzusehen. *Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der positiven Energie des elektromagnetischen Feldes von der Größe der halben Ruhenergie und aus der Gravitationsenergie, die der negativen Ruhenergie gleich ist.*

§ 6. Einteilchenlösungen von der Form $\Delta\nu = 0$, $\lambda = \gamma\,\lambda^*$

Wir verwenden der Einfachheit halber in diesem Abschnitt Kugelkoordinaten r, ϑ, φ, welche x_1, x_2, x_3 entsprechen sollen. Geht man mit dem Ansatz

$$\nu = f(x_1)\cdot h(x_2) \quad (59)$$

in die für Kugelkoordinaten formulierte Potentialgleichung (47)

$$\Delta\nu \equiv \nu_{|1|1} + \frac{2\,\nu_{|1}}{x_1} + \frac{\nu_{|2}}{x_1^2}\operatorname{ctg} x_2 + \frac{\nu_{|2|2}}{x_1^2} = 0 \quad (60)$$

ein, so erhält man für $h(x_2)$ einfache Kugelfunktionen 1. und 2. Art und für ν die rotationssymmetrischen Lösungen[11] $(x = \cos x_2;\ -1 \leq x \leq +1)$:

$$\nu_n = (a_1\,x_1{}^n + a_2\,x_1{}^{-(n+1)})\,[b_1\,P_n(x) + b_2\,Q_n(x)]; \quad (61)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$; a_i und b_i sind Konstanten;

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\,[(x^2-1)^n]^{(n)}; \quad (62)$$

$$Q_n(x) = P_n(x)\,\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{Polynom } (n-1)\text{-ten Grades.} \quad (63)$$

Symmetrisch zum Nullpunkt $x = 0$ sind die Funktionen P_{2n} und Q_{2n+1}, antimetrisch die Funktionen P_{2n+1} und Q_{2n}. P_n hat im Bereich $-1 \leq x \leq +1$ genau n einfache Nullstellen; außer $P_0 = 1$ nimmt jede Legendresche Kugelfunktion dort sowohl positive wie negative Werte an. Die Q_n haben nach (63) logarithmische Singularitäten bei $x = \pm 1$, und zwar ist $\lim Q_n(x) = +\infty$. Wir müssen verlangen, daß für $x_1 \to \infty$ $g_{44} = e^{2\nu_n} \to 1$, d. h. $\nu_n \to 0$ geht; daraus folgt $a_1 = 0$. Es muß aber auch $b_2 = 0$ sein, denn sonst würde die Maßbestimmung (26) längs der ganzen Polarachse $x_2 = 0$ bzw. $x_2 = \pi$ singulär werden. Physikalisch brauchbar sind also höchstens die partikulären Lösungen:

$$\nu_n = a_n\,P_n(x)/x_1{}^{n+1} \quad (64\,\text{a})$$

und ihre Summe

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,P_n(x)/x_1{}^{n+1}. \quad (64\,\text{b})$$

Das in § 1 erwähnte Modell einer Coulombschen Ladung[1] geht von $\nu = L/x_1$ aus, d. h. von $n = 0$ und $a_0 = L > 0$. Wir zeigen jetzt, daß die aus (64) für $n > 0$ sich ergebenden Folgen physikalisch unzulässig sind. Führt man (64 a) in das über den *ganzen* Raum erstreckte Integral aus (53), (54) ein, so bekommt man in Kugelkoordinaten:

$$\int\left(\nu_{|1}^2 + \frac{\nu_{|2}^2}{x_1^2}\right) e^{-\nu}\,x_1^2 \sin x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$
$$= 2\,\pi \int_{x_1=0}^{\infty}\int_{x=-1}^{1}\left(x_1^2\,\nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right)\cdot\exp\{-a_n\,P_n(x)/x_1{}^{n+1}\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x_1$$

Nun ist der im Exponenten stehende Term $(-a_n\,P_n(x)/x_1{}^{n+1})$ für die Kugelfunktionen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in mindestens einem x_2-Intervall des Integrationsgebietes positiv, und zwar für jedes zulässige x_1, insbesondere für $x_1 \to 0$; d. h. aber, daß das Integral für $n > 0$ divergiert. Auch Summen von der Form (64 b) können die Divergenzen nicht beheben. Die physikalisch brauchbare Lösung $\nu_0 = L\,P_0(x)/x_1$ entspricht dem Felde eines elektrischen Unipols, wie in der Arbeit[1] gezeigt wurde. Wir wollen uns überzeugen, daß unsere Lösung genau mit der dort auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt; man vergleiche dazu auch den § 1 der vorliegenden Arbeit. Wir schreiben wieder ν an Stelle von ν_0 und gehen zu zylindrischen Koordinaten $x_1{}', x_2{}', x_3{}'$ über; dann wird $\nu = L/(x_1{}'^2 + x_2{}'^2)^{1/2}$. Für dieses ν folgt aus den Gln. (46) für λ^*:

$$\lambda^* = -\frac{L^2\,x_1'^2}{2(x_1'^2 + x_2'^2)^2}.$$

ν und $\lambda = \gamma\,\lambda^*$ sind dann Lösung der Gl. (44). Wir führen an Stelle von γ eine andere verfügbare Kon-

[11] Siehe z. B. Madelung: Die math. Hilfsmittel des Physikers, 5. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1953, S. 103, und Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl., Teubner-Verlag, Leipzig 1948, S. 105 ff.

stante $\eta \equiv 1-\gamma$ ein und erhalten:

$$\nu = \frac{L}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}\,; \quad \lambda = -\frac{(1-\lambda)\, L^2 x_1'^2}{2\,(x_1'^2 + x_2'^2)^2}\,.$$

Das sind aber genau die Gln. (3), wenn man Kugelkoordinaten x_1, x_2, x_3 einführt, d. h.

$$\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} = x_1 \quad \text{und} \quad x_1'/\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} = \sin x_2$$

setzt. Die elektrischen Feldgrößen leiten sich nach (50) aus einem Potential Φ ab:

$$\Phi = \delta\, i \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, e^{\nu}; \quad \delta^2 = 1; \quad F_{14} = \Phi_{|1}; \quad F_{24} = \Phi_{|2}\,.$$

Das rechnen wir mit Hilfe der Interpretation (18), (20) in die elektrischen Feldstärkekomponenten E_1 und E_2 um und erhalten:

$$E_1 = \delta \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, e^{\nu-\lambda}\, \nu_{|1} = -\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, \frac{x_1' e^{\nu-\lambda}}{(x_1'^2 + x_1'^2)^{3/2}} = -\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, \frac{e^{\nu-\lambda} \sin x_2}{x_1^2}\,;$$

$$E_2 = \delta \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, e^{\nu-\lambda}\, \nu_{|2} = -\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, \frac{x_2' e^{\nu-\lambda}}{(x_1'^2 + x_2'^2)^{3/2}} = -\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, \frac{e^{\nu-\lambda} \cos x_2}{x_1^2}\,.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist also in Strenge radial gerichtet, und zwar gilt mit einem radialen Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$:

$$\mathfrak{E} = -\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\, \frac{e^{\nu-\lambda}}{x_1^2}\, \mathfrak{r}_0\,.$$

Damit $\mathfrak{E}$ reell wird, muß $\eta > 0$ angenommen werden. Gesamtruhmasse M_0 und Gesamtladung Q können nach (53), (54) ausgerechnet werden. Die Integrale konvergieren nur für $L > 0$. So wird:

$$Q = -4\,\pi\,\delta\, L \sqrt{\frac{2\,\eta}{\varkappa}}\,; \quad M_0 = \frac{8\,\pi\, L\,\eta}{\varkappa\, c^2}\,.$$

Wenn wir die Ladung Q in die Formel für die Feldstärke $\mathfrak{E}$ einführen und die Ausdrücke (3) für ν und λ verwenden, erhalten wir:

$$\mathfrak{E} = \frac{Q}{4\,\pi\, x_1^2} \exp\left\{\frac{L}{x_1} + \frac{(1-\eta)\, L^2 \sin^2 x_2}{2\, x_1^2}\right\} \mathfrak{r}_0$$

(rationelle CGS-Einheiten).

In großer Entfernung vom Teilchen, praktisch schon für $x_1 \gtrsim 10\, L$ herrscht das Coulomb-Feld. Die Beziehungen für M_0 und Q können nach den Konstanten L und η aufgelöst werden; das gibt:

$$L = \frac{Q^2}{4\,\pi\, c^2 M_0} = \frac{Q_c^2}{c^2 M_0}\,; \quad \eta = \frac{\varkappa\, c^4 M_0^2}{2\, Q^2} = \frac{G\, M_0^2}{Q_c^2}\,.$$

L ist also der „klassische Teilchenradius" – für ein Elektron der klassische Elektronenradius $r_0 = 2{,}84 \cdot 10^{-13}$ cm – und hängt erstaunlicherweise nicht von der Gravitationskonstanten G ab, obwohl das Teilchen durch das Zusammenwirken von Gravitation und Coulomb-Kraft zusammengehalten wird, wie wir in § 8 ausführlich nachweisen werden. Die Konstante η ($= 2{,}4 \cdot 10^{-43}$ für das Elektron) gibt das klassische Verhältnis der Gravitationskräfte zu den Coulomb-Kräften an, wie es in einem *euklidischen* Raum aus den Coulomb- und Newtonschen Gesetzen folgen würde. Die in einem Volumenelement $d\tau_3$ enthaltene Ladung (24) kann unter Verwendung der Gesamtladung Q geschrieben werden:

$$\varrho_Q\, d\tau_3 = \frac{Q\, L}{4\,\pi\, x_1^2}\, e^{-L/x_1} \sin x_2\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,.$$

Der für die Ladung im Volumenelement bei konstant gehaltenem $\sin x_2\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ charakteristische Ausdruck

$$P_Q = \frac{Q\, L}{4\,\pi\, x_1^2}\, e^{-L/x_1} = \frac{Q}{4\,\pi}\, \frac{\partial}{\partial x_1}\, (e^{-L/x_1})$$

ist Null im Zentrum des Teilchens, steigt zu einem Maximum an bei $x_1 = L/2$ und fällt nach außen quadratisch ab.

Die Lösung (64 a) für $n = 0$ entspricht also wie behauptet einem elektrischen Unipol. Die Lösungen (64 a) für $n \geq 1$ sollten elektrischen Dipolen, Quadrupolen usw. entsprechen; sie liefern jedoch divergente Integrale aller physikalischen Quantitäten und sind deshalb auszuschließen. Das ist ein befriedigendes Ergebnis, denn für jede Lösung vom Typ (46), (47) hat nach (57) die Ladung im ganzen Raum ein einheitliches Vorzeichen: elektrische Multipole können mit diesem Lösungstyp nicht beschrieben werden.

§ 7. Das Zweiteilchenproblem

Silberstein hat eine statische Lösung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen angegeben, die dem Feld zweier punktförmiger Massen im Abstand $2\,a$ entspricht [5]. Die Massen ziehen sich nicht an, noch stoßen sie sich ab; Silberstein hat daraus den Schluß gezogen, daß sich materielle Teilchen nicht als Feldsingularitäten auffassen lassen. Bechert hat darauf hingewiesen, daß diese Silbersteinsche Lösung nur die Berechnung der Bewegung von Probekörpern im Feld der beiden *festgehaltenen* Massen erlaube, daß sie aber keine Lösung des Zweikörperproblems darstelle [12].

Wir benutzen das zylindersymmetrische Linien-

[12] K. Bechert, Z. Astrophys. **12**, 117 [1936].

element (26) und setzen als Lösung von (47) an:

$$\nu = L_1/r_1 + L_2/r_2 \tag{65}$$

mit $r_1^2 = x_1^2 + (x_2+a)^2$; $r_2^2 = x_1^2 + (x_2-a)^2$.

$2a$ sei der konstante Abstand zwischen den einzigen Singularitätsstellen $(0, -a)$ und $(0, +a)$ von ν. Dann ist nach der zitierten Arbeit [13]:

$$\lambda^* = -\frac{x_1^2}{2}\left(\frac{L_1^2}{r_1^4}+\frac{L_2^2}{r_2^4}\right)+\frac{L_1 L_2}{2a^2}\left(\frac{x_1^2+x_2^2-a^2}{r_1 r_2}-1\right) \tag{66}$$

zusammen mit (65) die Lösung der Gln. (46), wovon man sich unmittelbar durch Einsetzen überzeugen kann. ν und $\lambda = \gamma\lambda^*$ lösen dann Gl. (44). Das Linienelement (26) wird für $r_1 \to \infty$ oder $r_2 \to \infty$ pseudoeuklidisch, wie man es für den materie- und feldfreien Raum verlangen muß. Ladung und Ruhmasse sind endlich, denn das über den ganzen Raum erstreckte Integral aus (53), (54):

$$J = \int_{\tau_3}\left(\nu_{|1}^2+\nu_{|2}^2\right)e^{-\nu}\, x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_{\tau_3}\left[\frac{L_1^2}{r_1^4}+\frac{L_2^2}{r_2^4}+\frac{2L_1L_2(x_1^2+x_2^2-a^2)}{r_1^3 r_2^3}\right]e^{-(L_1/r_1+L_2/r_2)} \cdot x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \tag{67}$$

konvergiert für $L_1 > 0$, $L_2 > 0$. Führt man eine effektive Ladungsdichte $\varrho_{Q,\mathrm{eff}} = \varrho_Q\sqrt{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}$ ein, so heißt Gl. (54):

$$\int_{\tau_3}\varrho_Q\,d\tau_3 = \int_{\tau_3}\varrho_{Q,\mathrm{eff}}\,x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \tag{68}$$

und es ist

$$\varrho_{Q,\mathrm{eff}} = \delta\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\left(\nu_{|1}^2+\nu_{|2}^2\right)e^{-\nu} = \delta\sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}}\left[\frac{L_1^2}{r_1^4}+\frac{L_2^2}{r_2^4}+\frac{2L_1L_2(x_1^2+x_2^2-a_c)}{r_1^3 r_2^3}\right]\cdot e^{-(L_1/r_1-L_2/r_2)}. \tag{69}$$

$\delta = \pm 1$ gibt die beiden möglichen Ladungsvorzeichen an. Setzt man der Einfachheit halber $L_1 = L_2 = 1$, so läßt sich über die Dichteverteilung folgendes sagen: der entscheidende Ausdruck

$$r_1^{-4} + r_2^{-4} + 2\,(x_1^2 + x_2^2 - a^2)\,r_1^{-3}\,r_2^{-3} \quad \text{ist stets} \geq 0$$

und hat zwei Pole bei $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$, im Nullpunkt $(r_1 = r_2 = a)$ dagegen ein absolutes Minimum vom Werte Null, nach außen fällt er wie $1/r^4$ gegen Null ab. Dieser Funktionsverlauf wird in Gl. (69) nur insofern wesentlich abgeändert, als die Nullstellen der Funktion $\exp\{-(r_1^{-1}+r_2^{-1})\}$ die Singularitäten überdecken und dadurch in plausibler Weise um die Stellen r_1, $r_2 = 0$ Wälle von Null aus ansteigender Dichte entstehen, die sich nach außen hin dem obigen Funktionsverlauf anschmiegen, zwischen den Teilchen jedoch eine Senke bilden. Entsprechendes gilt für die Dichten der Ruhmasse und der Energie.

[13] Siehe Anm. [5], Gl. (10); Anm. [12], Gl. (2).

Für das Quadrat der elektrischen Feldstärke bekommt man nach (18), (20), (50):

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 = \frac{2(1-\gamma)}{\varkappa}\left[\frac{L_1^2}{r_1^4}+\frac{L_2^2}{r_2^4}\frac{2L_1L_2(x_1^2+x_2^2-a^2)}{r_1^3 r_2^3}\right]e^{2\nu-2\lambda}, \tag{70}$$

andererseits nach der klassischen Elektrostatik für das Feld zweier gleichnamiger Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand $2a$:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 = \frac{Q_1^2}{(4\pi r_1^2)^2}+\frac{Q_2^2}{(4\pi r_2^2)^2}+\frac{2Q_1Q_2(x_1^2+x_2^2-a^2)}{(4\pi)^2 r_1^3 r_2^3}. \tag{71}$$

(70) geht für gegenüber L_1 und L_2 sehr große r_1 und r_2 in (71) über, wenn

$$Q_1 = 4\pi\delta L_1\sqrt{2(1-\gamma)/\varkappa}; \tag{72}$$

$$Q_2 = 4\pi\delta L_2\sqrt{2(1-\gamma)/\varkappa} \tag{73}$$

gesetzt wird. Die Lösung (65), (66) der Bechertschen Feldgleichungen entspricht somit einem statischen Modell zweier gleichnamiger Coulombscher Ladungen im Abstand $2a$.

§ 8. Dynamische Betrachtungen zu den statischen Modellen

Ist der Abstand 2 a zwischen den Teilchenmittelpunkten sehr groß gegen die Längen L_1 und L_2, so darf man in klassischer Terminologie von zwei gleichnamig geladenen, punktförmigen und voneinander weit entfernten Teilchen sprechen. Ebenfalls nach klassischen Überlegungen ist das Verhältnis der elektrostatischen Abstoßung zur Massenanziehung bei gleichen Teilchen $= 1/\eta$ (vgl. § 1) und von der Größenordnung 10^{40} bei geladenen Elementarteilchen. Man muß fragen, ob die Existenz einer statischen Mehrteilchenlösung in der Bechertschen Theorie bedeutet, daß die Summe aller Kräfte auf jedes materie- und ladungserfüllte Volumelement verschwindet. Ob es sich um ein stabiles, labiles oder instabiles Gleichgewicht handelt, ist dabei erst in zweiter Linie wichtig: zwei geladene Körper, die nicht festgehalten werden, können überhaupt nicht gegeneinander ruhen, wenn nur Coulombsche und Newtonsche Kräfte wirken und $\eta \neq 1$ ist.

Aus dem streng gültigen Bewegungsgesetz der

Materie (17) folgt nun wegen $V^\mu = \mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}s$,

$$V^1 = V^2 = V^3 = 0\,, \quad g_{\mu\nu} = 0\,, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu,$$

$$g_{\mu\mu} = g_{\mu\mu}(x_1\,, x_2)\,, \qquad V^4 = 1/\sqrt{g_{44}}:$$

$$-\frac{U\,V^4\sqrt{g_{44}}}{2}\,\frac{g_{44|1}}{g_{44}} + C\,V^4\,F_{14} = 0\,;$$

$$-\frac{U\,V^4\sqrt{g_{44}}}{2}\,\frac{g_{44|2}}{g_{44}} + C\,V^4\,F_{24} = 0\,. \qquad (74)$$

Wir führen nach (18), (20) die physikalischen Komponenten E_1 und E_2 ein; dann folgt durch Vergleich mit den Dichten ϱ_Q und ϱ_{M_0} aus (24), (25):

$$\varrho_{M_0}\,\frac{c^2\,g_{44|1}}{2\,g_{44}\sqrt{g_{11}}} + \varrho_Q\,E_1 = 0\,;$$

$$\varrho_{M_0}\,\frac{c^2\,g_{44|2}}{2\,g_{44}\sqrt{g_{22}}} + \varrho_Q\,E_2 = 0\,. \qquad (75)$$

Diese Gleichungen sprechen aber das Gleichgewicht zwischen der COULOMB-Kraft $\varrho_Q\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathfrak{E}$ und der Gravitationskraft $\varrho_{M_0}\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathfrak{G}$ in jedem Volumen $\mathrm{d}\tau_3$ aus; $\mathfrak{G}$ ist die Feldstärke des Gravitationsfeldes mit den Komponenten:

$$G_1 = \frac{c^2\,g_{44|1}}{2\,g_{44}\sqrt{g_{11}}}\,; \qquad G_2 = \frac{c^2\,g_{44|2}}{2\,g_{44}\sqrt{g_{22}}}\,. \qquad (76)$$

Für das statische Modell *eines* geladenen Teilchens drückt die Gl. (75) anscheinend einen krassen Widerspruch zur Erfahrung aus, denn die Gravitation ist auch in vom Teilchen weit entfernten Gebieten der COULOMB-Kraft gleich, während sie im Experiment um den Faktor $4{,}2\cdot 10^{42}$ beim Elektron, $1{,}2\cdot 10^{36}$ beim Proton kleiner ist. Ähnliche Schwierigkeiten entstehen bei Mehrteilchenmodellen, wenn es sich um weit voneinander entfernte Körper handelt, bei denen das Gleichgewicht (75) sicher nicht besteht. Nun wäre es möglich, daß in einer quantisierten Form der Theorie sich zeigen würde, daß die Abstände $2\,a$ zwischen den Teilchen von der Größenordnung der L_j sind, wie man es für das Modell eines Atomkerns annehmen müßte. Eine starke Stütze für diese Auffassung, daß a und die L_j in dieser Weise gekoppelt sein sollten, ist in unserem Ergebnis zu sehen, daß alle Teilchen einer Lösung gleichnamig geladen sind (das Lösungsverfahren für zwei Teilchen läßt sich auch für beliebig viele Teilchen verwenden); auch der Atomkern trägt – mindestens im Durchschnitt – eine einheitliche positive Ladung. Gäbe es eine statische Lösung, die zwei geladenen Teilchen mit verschiedenen Ladungsvorzeichen entspräche, so würde das gar nicht verstehbar sein, weil COULOMB-Kraft und Gravitation in gleichem Sinne, nämlich anziehend, wirken würden. Demgegenüber ist es bei dichter Packung der Teilchen verständlich, daß die Gebiete stark nichteuklidischer Metrik sich überlappen und dadurch möglicherweise die Ladungsabstoßung nicht nur beim Einzelteilchen, sondern im ganzen Kern kompensiert wird.

§ 9. Das Problem einer rotierenden Ladungsverteilung mit Magnetfeld

Läßt man nicht nur elektrostatische, sondern auch magnetostatische Felder zu, so müssen räumliche Komponenten V^1, V^2 oder V^3 der Vierergeschwindigkeit von Null verschieden sein: es findet eine Strömung der Ladungen und Ruhmassen statt. Solche zeitunabhängigen Lösungen sollen stationär heißen. Insbesondere läßt sich eine rotierende, achsialsymmetrische Ladungs- und Ruhmassenverteilung behandeln. Nachdem in der BECHERTschen Theorie das statische Modell einer COULOMB-Ladung aufgestellt werden kann, sollte man auch die Existenz von Lösungen erwarten, die einem geladenen Teilchen mit Eigendrehung entsprechen. Aus ihnen könnte das Verhältnis des Ladungsquadrats zum Drehimpuls berechnet werden, das in einer quantisierten Form der Theorie der SOMMERFELDschen Feinstrukturkonstanten $\alpha = 2\,\pi\,e_0{}^2/h\,c = 1/137$ entsprechen würde. Das Problem eines Teilchens mit Eigendrehung in der LORENTZ-invarianten Fassung der Theorie ist von BECHERT bereits behandelt worden [14].

Gehen wir wiederum vom zylindersymmetrischen Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = e^{-2\nu}\,[e^{2\lambda}\,(\mathrm{d}\,x_1^2 + \mathrm{d}\,x_2^2) + x_1^2\,\mathrm{d}\,x_3^2] + e^{2\nu}\,\mathrm{d}x_4^2 \quad (77)$$

aus, so können wir die früher abgeleiteten Ausdrücke (28) für den Krümmungstensor verwenden. λ, ν sowie die übrigen Feldgrößen sollen nur von x_1 und x_2 abhängen. Das elektromagnetische Feld sei statisch und ohne azimutale (x_3-)Komponenten; dann ist mit der Deutung (18), (20):

$$F^{12} = 0\,; \quad F^{34} = 0\,; \quad F^{\mu\nu} \neq 0 \ \text{sonst.} \qquad (78)$$

Nimmt man $C \neq 0$ an, d. h. es gibt irgendwo Ladungen, dann folgt aus diesen Ansätzen:

$$V^1 = V^2 = 0\,; \quad V^3\,V_3 + V^4\,V_4 = v_3^2 + v_4^2 = 1\,. \qquad (79)$$

Erfüllt man diese Beziehung mittels (21):

$$v_3 = \frac{\delta\beta}{i\sqrt{1-\beta^2}}\,; \quad v_4 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \quad \beta = \frac{|\mathfrak{v}_3|}{c}\,;$$

$$\delta^2 = \varepsilon^2 = 1\,, \qquad (80)$$

[14] K. BECHERT, Ann. Phys., Lpz. **16**, 97 [1955].

so kann β und näherungsweise für kleine β auch $|v_3|$ als das Verhältnis der Materiegeschwindigkeit in der x_3-Richtung zur Lichtgeschwindigkeit gedeutet werden. Aus den Feldgln. (9), (14) läßt sich v_3 als Funktion von λ, ν gewinnen:

$$\begin{aligned} 4(\lambda_{|1|1} + \lambda_{|2|2} + \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2 - \Delta\nu)\, \Delta\boldsymbol{\nu} \cdot v_3^2 &= (\lambda_{|1|1} + \lambda_{|2|2} + \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2)^2 \qquad (81)\\ &\quad - \left(\frac{\lambda_{|1}}{x_1} - \nu_{|1}^2 + \nu_{|2}^2\right)^2 - \left(\frac{\lambda_{|2}}{x_1} - 2\,\nu_{|1}\,\nu_{|2}\right)^2. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $v_3 = 0$ ein, so wird man auf die Gl. (44) zurückgeführt, die für unsere statischen Lösungen von entscheidender Bedeutung war. Die 17 Feldgln. der BECHERTschen Theorie (9) bis (12) lassen sich auf drei nichtlineare, noch einigermaßen übersichtliche Diff.-Gln. zurückführen, deren Lösungsmöglichkeiten von BECHERT und LINDNER untersucht werden. Beim Aufsuchen von Lösungen kann man einmal von erweiterten Lösungen der statischen Modelle ausgehen, zum anderen läßt sich der ungefähre Verlauf der elektromagnetischen Feldstärken in größerer Entfernung von einer rotierenden Ladungsverteilung aus klassischen Überlegungen gewinnen.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Professor BECHERT, der mich nicht nur bei vielen unbefriedigend verlaufenen Lösungsversuchen seiner Feldgleichungen unermüdlich beraten hat, sondern auch an dem Auffinden der geschilderten Lösungen mitbeteiligt war. Der Studienstiftung des Deutschen Volkes und dem Lande Rheinland-Pfalz danke ich für die großzügige Bereitstellung von Geldmitteln zur Durchführung dieser Untersuchungen.

Theory of Optical Activity of Molecules, Polymer Chains and Crystals

By S. VENKATARAMAN

Department of Physics, University of Madras, Guindy, Madras 25, India

(Z. Naturforschg. **16 a**, 356—362 [1961]; eingegangen am 27. Mai 1960)

The polarisability theory of optical activity has been fully worked out in tensor notation, giving formulae for birefringence and optical activity of a crystal kept in an arbitrary orientation in a beam of light. It is shown that the theory so developed can also be applied to a simple molecule or a polymer chain of fixed orientation, with some minor modifications. Compact formulae have been obtained useful for these cases, which also bring out the idea of "coupled oscillators" for the occurrence of optical activity. The formulae can also be averaged over all orientations and this leads to an expression for the specific rotation of a solution of a polymer containing helical chains. The theory, as applied to the α-helix and other helices occurring in proteins and polypeptides is being reported separately.

Theories of optical activity are generally of two types, either involving coupled oscillators [1], or purely in terms of optical principles, usually referred to as the polarisability theory [2]. KIRKWOOD [3] has shown that the quantum mechanical formulation of the coupled oscillators leads to the polarisability theory when certain reasonable approximations are made. RAMACHANDRAN [4] has applied the polarisability theory for calculating the rotatory power of β-quartz and some other crystals of simple structure, and has found reasonably satisfactory agreement with experiment. But similar calculations, from first principles, cannot be attempted on crystals having a more complicated structure, because of the forbidding nature of the numerical computations. In this paper a general mathematical formulation of the polarisability theory is presented. Formulae are given in a very compact form by making use of tensor notation, and they may be conveniently used in calculating the rotatory power of crystals or solutions, i. e., randomly orientied molecules or chains of molecules. The method also leads to similar compact formulae for calculating the refractive indices of crystals for different directions. The theoretical formulae derived here have been applied to calculate the optical activity of helical structures such as polypeptides. This will be reported separately.

1 eg. M. BORN, Phys. Z. **16**, 251 [1915].

2 eg. G. N. RAMACHANDRAN, Proc. Ind. Acad. Sci. A **33**, 217 [1951], which contains also detailed references to earlier literature.

3 J. G. KIRKWOOD, J. Chem. Phys. **5**, 479 [1937].

4 G. N. RAMACHANDRAN, Proc. Ind. Acad. Sci. A **33**, 309 [1951]; **34**, 127 [1951].